第28卷 第2期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 28 No. 2
2011年04月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Apr. 2011

文章编号:1005-3085(2011)02-0245-06

一类二次奇摄动 Robin 问题*

葛志新

(安徽工业大学数理学院，马鞍山 243002)

摘　要: 本文研究了可描述某件随有体积变化的化学反应的一类二次奇摄动边值问题．在适当的条件下，先利用幂级数形式展开法，就退化问题的边值条件的一重根、二重根、三重根分别构造了问题的外部解．其次利用伸长变量，构造问题的内层解，并应用微分不等式理论，证明了边值问题解的存在性、一致有效性和渐近性态．

关键词: 二次奇摄动；Robin 问题；单根；二重根；三重根；微分不等式理论

分类号: **AMS**(2000) 34E20; 34B15　　**中图分类号**: O175.14　　**文献标识码**: A

1　引言

奇摄动问题是国际学术界的热点问题[1-9]．许多学者探索了用各种摄动方法解奇摄动问题，做了大量的工作．他们利用边界层理论，多重尺度理论，平均值理论，匹配渐近展开理论，重正规化理论，不动点理论，同伦理论，微分不等式理论研究了一些类型的摄动问题，解决了大量的数学、物理、化学以及生物问题．其中关于 y' 二次的奇摄动边值问题，在应用领域中广泛出现如伴有体积变化的化学反应．章国华，侯斯[1] 曾研究了一类二次奇摄动问题中 Dirichlet 问题，Robin 问题，他利用原方程的近似方程讨论了原方程的解．Walter[2] 也研究了该关于 y' 二次的问题的 Dirichlet 问题，他利用退化方程和只含有最高阶项和 y'^2 项的方程来研究二次方程的解，得出近似估计．文献 [3] 也曾讨论过一类二阶 Robin 问题，但没有引入 $(y')^2$ 项．

本文考虑如下边值问题

$$\varepsilon\big[y''+f(x,y)(y')^2\big]+g(x,y)y'=h(x,y),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$y'(0,\varepsilon)-ay(0,\varepsilon)=A, \tag{2}$$

$$y'(1,\varepsilon)+by(1,\varepsilon)=B, \tag{3}$$

其中 ε 为小正数，a, b 为正常数，A, B 为常数．

问题 (1)-(3) 可以描述伴有体积变化的化学反应，即 y 代表气体在一块平板的催化表面上进行等温反应的无量纲浓度，变量 x 是从某一对超平面到平板 $x=1$ 边缘的标准化距离，参数 ε 是 Thiele 模量平方的倒数．本文将运用有别于章国华与 Walter 的方法，在适当的条件下，先利用幂级数形式展开法，就退化问题的边值条件的一重根、二重根、三重根分别构造了问题的外部解．其次，利用伸长变量，构造问题的内层解，并应用微分不等式理论，证明了边值问题解的存在性、一致有效性和渐近性态．

为了叙述方便，现作如下假设：

收稿日期: 2009-06-05.　**作者简介**: 葛志新 (1970年10月生)，女，硕士．研究方向：奇摄动理论和运用．
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10371006).

(H$_1$): (1)-(3) 的退化问题

$$g(x,u_0)u_0' = h(x,u_0), \quad 0<x<1, \tag{4}$$

$$u_0'(1)+bu_0(1) = B, \tag{5}$$

存在一个解 $u_0(x)\in C^{(2)}[0,1]$；

(H$_2$): 在所考虑的区域内关于其变元无限可微，$g(x,y)>0$；

(H$_3$): $h_y(0,u_0(0))=\sigma$，其中 σ 为正常数.

2 构造形式解

由假设 (H$_1$) 知 $u_0(1)$ 满足非线性方程

$$h(1,\alpha_0)+bg(1,\alpha_0)\alpha_0 = Bg(1,\alpha_0). \tag{6}$$

于是对应于 (6) 的每一根 α_0，(4), (5) 转化为

$$g\big(x,y(x)\big)y'(x) = h\big(x,y(x)\big), \quad 0<x<1, \quad y(1)=u_0(1),$$

在整个 $0\le x\le 1$ 上存在唯一解.

下面寻求形式渐近解，详细讨论三种情形：

情形 1 $u_0(1)$ 是 (6) 的单根. 记

$$\psi(\alpha_0) = h(1,\alpha_0)+bg(1,\alpha_0)\alpha_0 - Bg(1,\alpha_0),$$

所以

$$\psi\big(u_0(1)\big)=0, \quad \psi'\big(u_0(1)\big)\ne 0. \tag{7}$$

下面利用一般的渐近技巧构造问题 (1)-(3) 的外部解

$$U(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)\varepsilon^i, \quad x\in[0,1]. \tag{8}$$

把 (8) 代入 (1), (3)，得

$$\varepsilon\big[U''+f(x,U)(U')^2\big]+g(x,U)U' = h(x,U), \quad 0<x<1, \tag{9}$$

$$U'(1,\varepsilon)+bU(1,\varepsilon)=B. \tag{10}$$

对 (9) 中 f, g, h 利用 Taylor 公式展开，并比较展开式中 ε^i 的系数，得

$$g\big(x,u_0(x)\big)u_i' + \big[g_y(x,u_0(x))u_0'(x) - h_y(x,u_0(x))\big]u_i = E_{i-1}(x), \tag{11}$$

这里 $u_0(x)$ 为 (4), (5) 的解，$E_{i-1}(x)$ 是依次由

$$u_0(x), u_1(x), \cdots, u_{i-1}(x), \quad i=1,2,3,\cdots$$

确定的函数. 另由 (7), (10), (11)，得

$$u_i(1)=\frac{-E_{i-1}(1)}{\psi'(u_0(1))}.$$

因此 $u_i(x)$ 存在且唯一，即得问题 (1)-(3) 的外部解.

其次，再在 $x=0$ 附近引入伸长变量 $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$，构造内部解

$$V(\xi,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i(\xi)\varepsilon^i.$$

把 $y=U(x,\varepsilon)+\varepsilon V(\xi,\varepsilon)$ 代入 (1), (2)，得

$$\begin{aligned}\ddot V+g(\varepsilon\xi,U+\varepsilon V)\dot V=&h(\varepsilon\xi,U+\varepsilon V)-\varepsilon f(\varepsilon\xi,U+\varepsilon V)(U'+\dot V)^2-g(\varepsilon\xi,U+\varepsilon V)U'\\&+\varepsilon f(\varepsilon\xi,U)(U')^2+g(\varepsilon\xi,U)U'-h(\varepsilon\xi,U),\end{aligned}\tag{12}$$

$$U'(0,\varepsilon)+\dot V(0,\varepsilon)-a\big[U(0,\varepsilon)+\varepsilon V(0,\varepsilon)\big]=A.\tag{13}$$

对 (12) 利用 Taylor 公式展开，并比较展开式及 (13) 中 ε^i 的系数，得

$$\ddot v_0+g\big(0,u_0(0)\big)\dot v_0=0,\quad \dot v_0(0)=A-u_0'(0)+au_0(0),$$

$$\ddot v_i+g\big(0,u_0(0)\big)\dot v_i=F_{i-1}(\xi),\quad \dot v_i(0)=-u_i'(0)+au_i(0)+av_{i-1}(0),$$

其中 $F_{i-1}(\xi)$ 是形如

$$\sum_{j=0}^{i-1}\phi(\xi)v_j(\xi),\quad i=1,2,\cdots$$

的函数．作为校正项的主要项，v_i 必须满足

$$\lim_{\xi\to+\infty}v_i(\xi)=0,\quad i=0,1,2,\cdots.$$

所以

$$v_0(\xi)=-\dot v_0(0)\mathrm{e}^{-g(0,u_0(0))\xi},\quad v_i(\xi)\le O\big(\mathrm{e}^{-g(0,u_0(0))\xi}\big),$$

并且 $v_i(\xi)$ 可依次算出，从而得到原问题的形式解.

情形 2 $u_0(1)$ 是 (6) 的二重根，所以

$$\psi\big(u_0(1)\big)=0,\quad \psi'\big(u_0(1)\big)=0,\quad \psi''\big(u_0(1)\big)\neq 0.\tag{14}$$

我们寻求外部展开式

$$U(x,\sqrt{\varepsilon}\,)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)\big(\sqrt{\varepsilon}\,\big)^i,\quad x\in[0,1].$$

类似于情形 1，我们可知 $u_0(x)$ 是 (4), (5) 的解，且

$$\psi''\big(u_0(1)\big)u_1^2(1)=2\big[u_0''(1)+f(1,u_0(1))(u_0'(1))^2\big].$$

如果我们假设

$$\psi''\big(u_0(1)\big)\big[u_0''(1)+f(1,u_0(1))(u_0'(1))^2\big]>0,\tag{15}$$

那么可得到两个不同的实值 $u_1(1)$，即

$$u_1(1)=\pm\alpha_1=\pm\sqrt{\frac{2[u_0''(1)+f(1,u_0(1))u_0'^2(1)]}{\psi''(u_0(1))}}.$$

于是

$$u_1(x) = \pm\alpha_1 \exp\int_1^x \frac{g_y(t,u_0(t))u_0'(t) - h_y(t,u_0(t))}{g(t,u_0(t))}\mathrm{d}t.$$

继续下去，只要 $u_1(1)$ 选定，我们可以逐次地唯一确定 $u_i(1)$，从而唯一确定 $u_i(x)$，其中 $i = 2,3,\cdots$. 于是对于满足限制 (15) 的重根 α_0，可以形式上得到两个外部解 $U(x,\sqrt{\varepsilon})$.

情形 3 $u_0(1)$ 是 (6) 的三重根，所以

$$\psi\big(u_0(1)\big) = 0,\quad \psi'\big(u_0(1)\big) = 0,\quad \psi''\big(u_0(1)\big) = 0,\quad \psi'''\big(u_0(1)\big) \neq 0.$$

我们寻求下面的外部展开式

$$U\big(x,\varepsilon^{\frac{1}{3}}\big) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)\varepsilon^{\frac{i}{3}},\quad x\in[0,1].$$

类似于情形 1、情形 2，我们可知 $u_0(x)$ 是 (4), (5) 的解，且

$$\psi'''\big(u_0(1)\big)u_1^3(1) = 6\big[u_0''(1) + f(1,u_0)(u_0'(1))^2\big].$$

所以当 $u_0''(1) + f(1,u_0(1))(u_0'(1))^2 \neq 0$ 时，有

$$u_1(1) = \alpha_1 = \left\{\frac{6[u_0''(1) + f(1,u_0(1))(u_0'(1))^2]}{\psi'''(u_0(1))}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

于是 $u_1(x)$ 是初值问题的

$$g\big(x,u_0(x)\big)u_1' + \big[g_y(x,u_0(x))u_0'(x) - h_y(x,u_0(x))\big]u_1 = 0,\quad u_1(1) = \alpha_1$$

的唯一解.

继续下去，我们用直接方式唯一地求得 $u_i(x)$，$i = 3,4,\cdots$，形式上得到唯一一个外部解.

我们寻找情形 2，情形 3 的内部解可以像情形 1 那样唯一求得.

3 主要结果

下面应用微分不等式定理来证明形式解的存在性，只证情形 1，其它情形类似证得. 构造两个函数

$$\alpha(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} u_i(x)\varepsilon^i + \varepsilon\sum_{i=0}^{m} v_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varepsilon^i - l\varepsilon^{m+1},$$

$$\beta(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} u_i(x)\varepsilon^i + \varepsilon\sum_{i=0}^{m} v_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varepsilon^i + l\varepsilon^{m+1},$$

其中 l 为一待定正数. 显然

$$\alpha(x,\varepsilon) \leq \beta(x,\varepsilon), \tag{16}$$

$$\alpha'(0,\varepsilon) - a\alpha(0,\varepsilon) \geq A \geq \beta'(0,\varepsilon) - a\beta(0,\varepsilon), \tag{17}$$

$$\alpha'(1,\varepsilon) + b\alpha(1,\varepsilon) \leq B \leq \beta'(1,\varepsilon) + b\beta(1,\varepsilon). \tag{18}$$

下证

$$\varepsilon\big[\alpha''+f(x,\alpha)(\alpha')^2\big]+g(x,\alpha)\alpha'-h(x,\alpha)\geq 0, \tag{19}$$

$$\varepsilon\big[\beta''+f(x,\beta)(\beta')^2\big]+g(x,\beta)\beta'-h(x,\beta)\leq 0. \tag{20}$$

依据合成解的构造和 (H_3)，得

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big[\alpha''+f(x,\alpha)(\alpha')^2\big]+g(x,\alpha)\alpha'-h(x,\alpha)\\ =\ &\ddot v_0-g\big(0,u_0(0)\big)\dot v_0+\sum_{i=1}^{m}\big[\ddot v_i-g(0,u_0(0))\dot v_i-F_{i-1}(\xi)\big]+h_y\big(0,u_0(0)\big)l\varepsilon^{m+1}+O(\varepsilon^{m+1}).\end{aligned}$$

依据 (H_3)，并记 $|O(\varepsilon^{m+1})|\leq k\varepsilon^{m+1}$，其中 $k>0$，所以当 $l\geq\frac{k}{\sigma}$ 时，有

$$\varepsilon\big[\alpha''+f(x,\alpha)(\alpha')^2\big]+g(x,\alpha)\alpha'-h(x,\alpha)\geq\sigma l\varepsilon^{m+1}-k\varepsilon^{m+1}\geq 0.$$

同理我们有

$$\varepsilon\big[\beta''+f(x,\beta)(\beta')^2\big]+g(x,\beta)\beta'-h(x,\beta)\leq 0.$$

通过以上叙述，当 $l\geq\frac{k}{\sigma}$ 时，根据 (16)-(20)，利用微分不等式定理和文献 [8]，问题 (1)-(3) 在情形 1 下，存在一个解 $y(x,\varepsilon)\in C^{(2)}$，使得

$$\alpha(x,\varepsilon)\leq y(x,\varepsilon)\leq\beta(x,\varepsilon),\quad 0\leq x\leq 1.$$

定理 在假设 (H_1)-(H_3) 下，问题 (1)-(3)，有：

1) 在情形 1 下，存在一个形如

$$y(x,\varepsilon)=U(x,\varepsilon)+\varepsilon V(\xi,\varepsilon),\quad 0<\varepsilon\ll 1,\quad 0\leq x\leq 1$$

的一致有效渐近解，其中

$$U(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)\varepsilon^i,\quad V(\xi,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i(\xi)\varepsilon^i,\quad \xi=\frac{x}{\varepsilon};$$

2) 在情形 2 下，且

$$\big[2bg_y(1,\alpha_0)-g_{yy}(1,\alpha_0)u_0'(1)+h_{yy}(1,\alpha_0)\big]\big[u_0''(1)+f(1,\alpha_0)(u_0'(1))^2\big]<0$$

时，存在两个形如

$$y(x,\sqrt{\varepsilon}\,)=U(x,\sqrt{\varepsilon}\,)+\varepsilon V(\xi,\sqrt{\varepsilon}\,),\quad 0<\varepsilon\ll 1,\quad 0\leq x\leq 1$$

的一致有效渐近解，其中

$$U(x,\sqrt{\varepsilon}\,)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)\big(\sqrt{\varepsilon}\,\big)^i,\quad V(\xi,\sqrt{\varepsilon}\,)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i(\xi)\big(\sqrt{\varepsilon}\,\big)^i,\quad \xi=\frac{x}{\varepsilon};$$

3) 在情形 3 下，且 $u_0''(1)+f(1,\alpha_0)(u_0'(1))^2\neq 0$ 时，存在一个形如

$$y(x,\varepsilon^{\frac13})=U(x,\varepsilon^{\frac13})+\varepsilon V(\xi,\varepsilon^{\frac13}),\quad 0<\varepsilon\ll 1,\quad 0\leq x\leq 1$$

的一致有效渐近解，其中

$$U(x,\varepsilon^{\frac13}\,)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)\varepsilon^{\frac{i}{3}},\quad V(\xi,\varepsilon^{\frac13}\,)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i(\xi)\varepsilon^{\frac{i}{3}},\quad \xi=\frac{x}{\varepsilon}.$$

参考文献:

[1] 章国华，侯斯F A. 非线性奇异摄动现象：理论和应用[M]. 福州：福建科学技术出版社，1989
Zhang G H, Hows F A. The Nonlinear Singularly Perturbed Phenomenon: Theory and Application[M]. Fuzhou: Fujian Science and Technology Press, 1989

[2] Walter K. Perturbation problems with quadratic dependence on the first derivative[J]. Nonlinear Analysis, 2002, 51: 469-486

[3] O'malley R E. Introduction to Singular Perturbation[M]. New York: Academic Press, 1974

[4] 欧阳成. 一个带 m 阶转向点的奇摄动特征值问题[J]. 工程数学学报，2005, 22(3): 559-562
Ouyang C. A singularly perturbed eigenvalue problem with turning point of m-th order[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(3): 559-562

[5] 莫嘉琪，王辉，林万涛. 一类二阶非线性方程的激波解[J]. 工程数学学报，2005, 22(6): 1109-1112
Mo J Q, Wang H, Lin W T. A class of shock solution for nonlinear equations of second order[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(6): 1109-1112

[6] 唐荣荣. 一类非线性奇摄动问题的激波性态[J]. 工程数学学报，2008, 25(2): 365-368
Tang R R. The shock behavior for a class of nonlinear singularly perturbed problem[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(2): 365-368

[7] 莫嘉琪. 一类大气浅水波方程的近似解[J]. 物理学报，2007, 56(7): 3662-3666
Mo J Q. Approximate solution for a class of atmospheric wading wave equations[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(7): 3662-3666

[8] Mo J Q. The singularly perturbed nonlinear boundary value problems[J]. Applied Mathematics, 2004, 17(1): 37-41

[9] 葛志新，刘树德. 一类非线性奇摄动边值问题的迭层解[J]. 石河子大学学报(自然科学版)，2009, 27(1): 107-109
Ge Z X, Liu S D. The overlapping layer solution to nonlinear singularly perturbed boundary value problem[J]. Journal of Shihezi University (Natural Science Edition), 2009, 27(1): 107-109

A Class of Quadratic Singularly Perturbed Boundary Value Problems with the Robin Condition

GE Zhi-xin

(School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243002)

Abstract: A class of quadratic singularly perturbed boundary value problems with the Robin condition are discussed in this paper, these problems can be used to describe some chemical reactions with variational volume. Under the appropriate conditions, the outer solutions are firstly constructed by the power series expansion. The outer solutions are, respectively, the simple root, the double root and the triple root of the quadratic singularly perturbed boundary value problem. Then the inner solutions are constructed by introducing the extended variable. Applying the theory of differential inequality, we obtain the uniformly effective asymptotic solutions.

Keywords: quadratic singularly perturbed boundary value problem; the Robin problem; the simple root; the double root; the triple root; differential inequalities

Received: 05 June 2009. **Accepted:** 17 Mar 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10371006).